Solution 5 :

1°/a) Soit $f_n(t)=\dfrac{\sin^{2n}t}{\cos t}$; f_n est dérivable sur $[0,a]$ et $\forall t\in[0,a]$,

$$f_n'(t)=\frac{\sin^{2n-1}t(2n\cos^2 t+\sin^2 t)}{\cos^2 t}\geq 0$$

ce qui prouve que f_n est une fonction croissante sur $[0,a]$ donc pour tout $t\in[0,a]$, $f_n(0)\leq f_n(t)\leq f_n(a)$ d'où $0\leq\dfrac{\sin^{2n}t}{\cos t}\leq\dfrac{\sin^{2n}a}{\cos a}$.

b) En intégrant entre 0 et a ces inégalités on obtient :

$$0\leq\int_0^a\frac{\sin^{2n}t}{\cos t}dt\leq\int_0^a\frac{\sin^{2n}a}{\cos a}dt$$

or $\displaystyle\int_0^a\frac{\sin^{2n}a}{\cos a}dt=\frac{\sin^{2n}a}{\cos a}[t]_0^a=a\frac{\sin^{2n}a}{\cos a}$

Il en résulte que : $0\leq I_n(a)\leq a\dfrac{\sin^{2n}a}{\cos a}$.

c) On a : $\forall n\geq 1$, $0\leq I_n(a)\leq a\dfrac{\sin^{2n}a}{\cos a}$ et

$$\lim_{n\to+\infty}a\frac{\sin^{2n}a}{\cos a}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a}{\cos a}\cdot(\sin^2 a)^n=0\ \text{ car }-1<\sin^2 a<1$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n(a)=0$.

2°/ $U_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(2k+1)\cdot 2^{2k+1}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}$

$$=\sin\frac{\pi}{6}+\frac{\sin^3(\frac{\pi}{6})}{3}+\frac{\sin^5(\frac{\pi}{6})}{5}+\cdots+\frac{\sin^{2n-1}(\frac{\pi}{6})}{2n-1}=F_n(\frac{\pi}{6})$$

or d'après 4°/ b) :

$$\lim_{n\to+\infty}F_n(\frac{\pi}{6})=g(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}\text{Log}(\frac{1+\sin\frac{\pi}{6}}{1-\sin\frac{\pi}{6}})=\frac{1}{2}\text{Log}3=\text{Log}\sqrt{3}$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=g(\frac{\pi}{6})=\text{Log}\sqrt{3}$.